

Županijsko natjecanje iz logike

A - kategorija

10. ožujka 2026.

Zaporka:

--	--	--	--	--	--

(peteroznamenkasti broj i riječ)

Broj bodova:

	195
--	-----

Povjerenstvo županijskoga natjecanja:

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE

A - kategorija

10. ožujka 2026.

BODOVI*:

- POTPUNO TOČNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- POGREŠNO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

ZADATAK	BROJ BODOVA	NAJVIŠE BODOVA
1.		21
2.		30
3.		45
4.		21
5.		24
6.		30
7.		24
UKUPNO		195

*Posebna napomena za bodovanje navedena je u 5. zadatku.

Vrijeme rješavanja testa: 120 minuta

Zadatak 1.

Poznato vam je još sa školskog natjecanja da mačke Annie, Frozen i Niki rade nered kada ostanu same kod kuće, a pritom i ne govore istinu (zato ih njihovi vlasnici katkad zovu zlomačkama). Kako bi riješili taj problem, vlasnici su instalirali mačji alarm. Zadana su tri binarna stanja:

- p : Frozen je na radijatoru
- q : Niki je na balkonu
- r : Annie je u kupaonici

Alarm se uključuje prema pravilu: $A \equiv ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

Također se uključuje prema rezervnom pravilu: $B \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

Umjesto klasične istinitosne tablice s 8 redaka, svakoj varijabli pridružimo vektor (niz od 8 znakova 0/1).

Troznamenski binarni zapis 111 znači: formula je istinita u toj valuaciji, dok zapis 000 znači da je neistinita u toj valuaciji. Zapisi idu redom: $pqr = 111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000$.

Vektori varijabli su sljedeći:

- $\vec{p} = 11110000$
- $\vec{q} = 11001100$
- $\vec{r} = 10101010$

Operacije nad formulama postaju operacije nad vektorima.

1. Izračunajte vektor \vec{A} . Zaokružite točan odgovor: A je **valjana** / **kontradiktorna** / **zadovoljiva**.
2. Izračunajte vektor \vec{B} . Zaokružite točan odgovor: B je **valjana** / **kontradiktorna** / **zadovoljiva**.
3. Provjerite vrijedi li $A \models B$ tako da izračunate vektor $(A \rightarrow B)$ i zaključite je li $A \rightarrow B$ valjana. Zaokružite točan odgovor: $A \models B$ **vrijedi** / **ne vrijedi**.
4. Razmotrite formulu: $C \equiv B \wedge \neg r$.
 - (a) Izračunajte \vec{C} . _____
 - (b) Iz vektora \vec{C} odredite u kojim valuacijama istodobno vrijedi sljedeće: rezervno je pravilo B istinito, a Annie nije u kupaonici.
 - i. $(p,q,r) =$ _____
 - ii. $(p,q,r) =$ _____
 - iii. $(p,q,r) =$ _____

(7×3 boda = 21 bod)

Zadatak 2.

Matematičar Marko odlučio je klasificirati hipertrivijalne brojeve prema redu veličine. Kako njegovo istraživanje još traje, ovo su klase koje je do sada napravio s pripadajućim svojstvima:

- Mala veličina M ima svojstvo A : dodavanjem male veličine mijenja svoju vrijednost.
- Velika veličine V ima svojstvo B : dodavanjem male veličine ne mijenja svoju vrijednost.
- Jako velika veličina J ima svojstvo C : množenjem velikom veličinom ne mijenja vrijednost.

Marko je u svome dosadašnjem istraživanju uspio uspostaviti veze (1)-(3), pravila isključenja (4)-(5) i pravilo ponašanja (6):

1. $M \rightarrow A$
2. $V \rightarrow B$
3. $J \rightarrow C$
4. $J \rightarrow \neg M$
5. $J \rightarrow \neg V$
6. $(A \wedge B) \rightarrow J$

Formule (1)-(6) uzmite kao pretpostavke te odredite slijedi li:

Iz (1)-(3):

1. Ako se x mijenja pri dodavanju, tada x nije mala veličina. (DA / NE)
2. $(M \wedge J) \rightarrow (A \wedge C)$ (DA / NE)

Iz (1)-(5):

3. Ako x mijenja vrijednost dodavanjem male vrijednosti i ne mijenja vrijednost dodavanjem male vrijednosti, tada je x velika veličina ili jako velika veličina. (DA / NE)
4. $J \rightarrow (\neg M \wedge \neg V)$ (DA / NE)

Iz (1)-(6):

5. Ako je x mala veličina i velika veličina, tada x množenjem s velikom veličinom ne mijenja vrijednost. (DA / NE)

6. $\neg(M \wedge V)$ (DA / NE)

Može li se na temelju bilo koje kombinacije zadanih premisa zaključiti:

7. Velike veličine mijenjaju se pri množenju s jako velikim veličinama. (DA / NE)

Sada ćemo kolekciju klase zamijeniti kolekcijom skupa kako bismo mogli koristiti operacije nad skupovima. Označavamo skupove $\{M\}$, $\{V\}$ i $\{J\}$. Simbol \notin označava kako neki predmet x nije element navedenog skupa.

Odredite vrijedi li:

8. $\forall x((x \in \{M\} \vee x \in \{V\}) \rightarrow x \in \{J\})$ (DA / NE)

9. $\forall x(x \in \{J\} \rightarrow x \notin \{M\})$ (DA / NE)

10. $\{J\} \cap \{M\} = \emptyset$ (DA / NE)

(10×3 boda = 30 bodova)

Zadatak 3.

Razmotrite sljedeći tekst:

„Ako je svaka tvrdnja koja slijedi iz istinite tvrdnje istinita, onda ni jedna kontradikcija ne slijedi iz istine, osim ako je istina sama kontradiktorna.”

Definirane su sljedeće sudne varijable:

- I : Tvrdnja je istinita.
- S : Tvrdnja je logička posljedica neke istinite tvrdnje (istine kao premise).
- K : Tvrdnja je kontradiktorna.

U nastavku su ponuđene tri formalizacije tog teksta:

(F1) $(I \wedge S) \rightarrow \neg K$

(F2) $(I \rightarrow S) \rightarrow (\neg K \vee \neg I)$

(F3) $((I \wedge S) \rightarrow \neg K) \vee (I \wedge K)$

Za svaku od navedenih tvrdnji zaokružite DA ako ona ispravno formalizira zadani tekst, a inače NE.

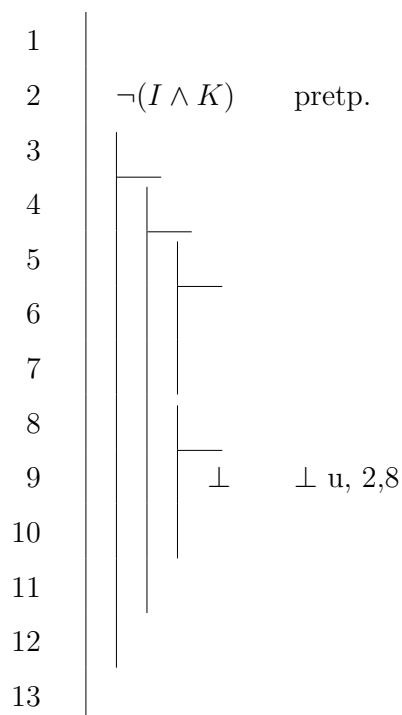
- | | |
|---------------|-----------|
| • (F1) | (DA / NE) |
| • (F2) | (DA / NE) |
| • (F3) | (DA / NE) |

Iz kojih tvrdnji F1-F3 slijedi tvrdnja: “Ako je neka tvrdnja kontradikcija, onda sigurno ne slijedi iz istinite tvrdnje.”? Zaokružite točan odgovor. **F1 / F2 / F3 / Ne slijedi ni iz jedne.**

Dovršite izvod koji pokazuje da iz dane tvrdnje te tvrdnje da istina nije kontradiktorna slijedi:

Ako je tvrdnja istinita, tada: ako slijedi iz istinite tvrdnje, nije kontradiktorna.

Kako postoje različite konvencije oko detalja u prirodnoj dedukciji, dobro proučite pravila u prilogu (na posljednjim stranicama testa).



Napomena: Potpuno točno ispunjen redak, što uključuje i opravdanje, donosi tri boda. Izostanak rješenja donosi jedan bod, a nepotpuno ili pogrešno rješenje nula bodova.

(15×3 boda = 45 bodova)

Zadatak 4.

U ovom se sustavu ne koristimo standardnim veznikom \rightarrow , nego posebnim veznikom \Rightarrow koji se tumači ovako:

$\text{Var}(\varphi)$ je skup sudnih varijabli koje se pojavljuju u formuli φ .
 $\varphi \Rightarrow \psi$ je istinito ako i samo ako je $\varphi \rightarrow \psi$ istinito i $(\text{Var}(\varphi) \cap \text{Var}(\psi) \neq \emptyset)$.

Dakle, osim što ne smije biti slučaja da je φ istinito, a ψ neistinito, traži se i relevantnost: lijeva i desna strana moraju dijeliti barem jednu varijablu.

Primjer: $p \Rightarrow (p \vee q)$ može biti istinito, ali $p \Rightarrow (q \vee \neg q)$ uvijek je neistinito.

Ekvivalencija u ovom sustavu znači: dvije formule imaju iste istinitosne vrijednosti u svim valuacijama prema ovom tumačenju \Rightarrow .

Zadane su sljedeće formule:

- F1 $p \Rightarrow (p \vee q)$
- F2 $(p \wedge q) \Rightarrow p$
- F3 $p \Rightarrow (p \wedge q)$
- F4 $(p \vee q) \Rightarrow p$
- F5 $p \Rightarrow (r \vee \neg r)$
- F6 $(p \wedge r) \Rightarrow (r \vee q)$

1. Razvrstajte formule u sljedeće razrede:

- valjane: _____
- kontradiktorne: _____
- zadovoljive, ali nevaljane: _____

2. Je li u ovom sustavu istinita sljedeća shema za sve formule φ, ψ, χ ?

- a) Ako je $\varphi \Rightarrow \psi$ i $\psi \Rightarrow \chi$ valjano, tada je i $\varphi \Rightarrow \chi$ valjano. (DA / NE)
- b) Ako je $\varphi \Rightarrow \psi$ valjano, tada je i $(\varphi \wedge \chi) \Rightarrow \psi$ valjano. (DA / NE)
- c) Ako je $\varphi \Rightarrow \psi$ valjano, tada je i $\varphi \Rightarrow (\psi \vee \chi)$ valjano. (DA / NE)
- d) Ako je $\varphi \Rightarrow \psi$ valjano, tada je i $\psi \Rightarrow \varphi$ valjano. (DA / NE)

(7×3 boda = 21 bod)

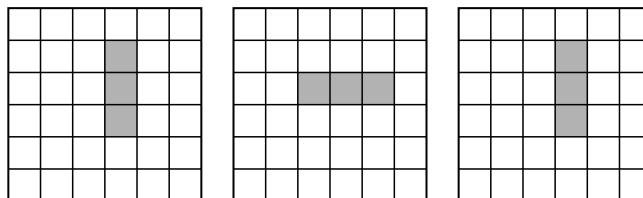
Zadatak 5.

U ovom ćemo zadatku igrati *Igru života*. Pretpostavit ćemo kako svaki život evoluira prema unaprijed zadanim pravilima. Ispunjeno polje označava živo polje, prazno polje označava neživo polje. Svako je polje okruženo s osam drugih polja.

Pravila evolucije:

- Živo polje s manje od 2 živa susjeda postaje neživo u sljedećoj generaciji.
- Živo polje s točno 2 ili 3 živa susjeda ostaje živo u sljedećoj generaciji.
- Živo polje s više od 3 živa susjeda postaje neživo u sljedećoj generaciji.
- Neživo polje s točno 3 živa susjeda postaje živo u sljedećoj generaciji.

Primjer:

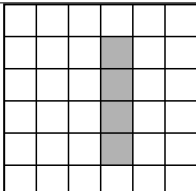
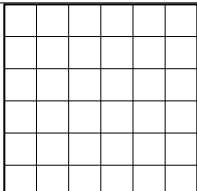
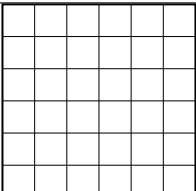
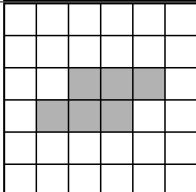
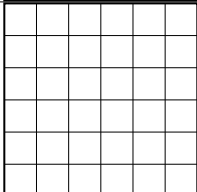
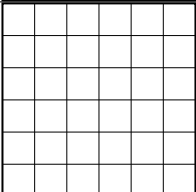
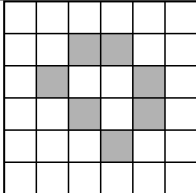
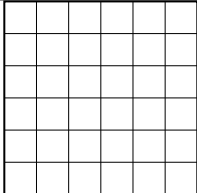
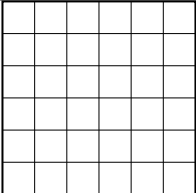
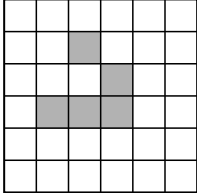
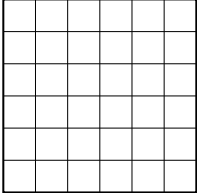
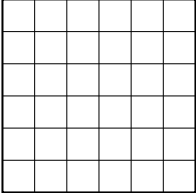


Zadano je početno stanje s određenim brojem živih i neživih polja. Potrebno je odrediti i ucrtati sljedeće dvije generacije osjenčavanjem odgovarajućih polja te utvrditi nastavlja li se evolucija nakon druge generacije.

Odgovore označite na sljedeći način:

- DA – ako je treća generacija različita od druge.
- NE – ako je treća generacija jednaka drugoj.

Napomena: svaki potpuno točno ispunjeni podzadatak (ucrtane generacije i izabran ispravan odgovor) nosi šest bodova. U slučaju bilo kakve pogreške ili nepotpunog odgovora, podzadatak nosi nula bodova, a potpuno prazan podzadatak nosi jedan bod.

Početno stanje	Prva generacija	Druga generacija	Nastavak evolucije
			DA / NE
			DA / NE
			DA / NE
			DA / NE

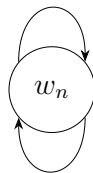
(4×6 bodova = 24 boda)

Zadatak 6.

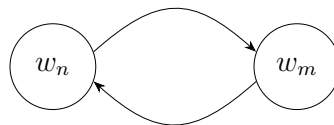
Promatramo vojnu vježbu Hrvatske ratne mornarice u kojoj sudjeluju raketne topovnjače. Sudjeluje ukupno 5 različitih vrsta topovnjača, koje se razlikuju prema dosegu i smjeru pucanja.

Topovnjače stoje u određenim relacijama, te se zapis xRy čita kao “ x je u relaciji prema y ”, ili kolokvijalnim rječnikom “ x vidi y ”. Svaka relacija može imati određena svojstva koja su opisana niže:

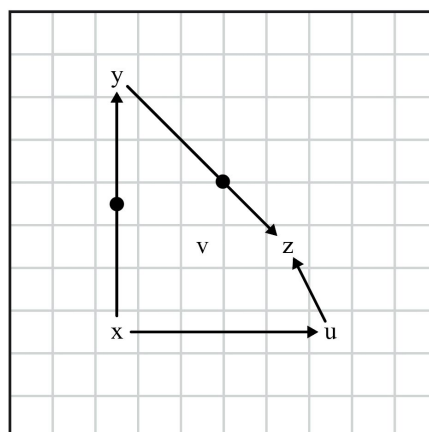
- $w_n R w_n$ (vrijedi univerzalno)



- $(w_n R w_m) \rightarrow (w_m R w_n)$ (vrijedi na označenim relacijama, oznaka $\text{---}\bullet\text{---}$)



Na temelju zadanog rasporeda topovnjača odredite jesu li sljedeće tvrdnje istinite:



- a) $[\forall w(wRw) \rightarrow \exists w(uRw)] \wedge \exists w(wRv)$ I / N
- b) $\exists w(zRw \wedge xRw \wedge yRw \wedge uRw)$ I / N
- c) $vRz \rightarrow yRx$ I / N
- d) $uRz \rightarrow \neg(xRy)$ I / N
- e) $(zRu \vee uRz) \wedge (xRz \rightarrow zRy)$ I / N

Na temelju definiranih svojstava relacija odredite koji element odgovara kojoj topovnjači prema opisu niže. Svako polje označava 1 km udaljenosti.

Naziv topovnjače	Doseg	Smjer pucanja	Element
Petar Krešimir IV.	8 km	Ravno, dijagonalno	
Dmitar Zvonimir	8 km	Ravno	
Šibenik	8 km	Dijagonalno	
Vukovar	2 km + 1 km	L-oblik	
Dubrovnik	1 km	Ravno, dijagonalno	

(10×3 boda = 30 bodova)

Zadatak 7.

Bez obzira na to čime se bavili — filozofijom, znanostima, teorijom metloboja, politikom ili običnim svakodnevnim raspravama — ako želimo nešto argumentirati i time nešto postići, nije dovoljno samo da smo uvjereni da smo u pravu. Važno je kako to pokušavamo pokazati. Naime, čak i vrlo opravdane brige mogu se izgubiti u bujici emocija, prijetnji, generalizacija i ne baš sretno složenih argumenata.

U ovom zadatku razmatramo slučaj međunarodnog natjecanja iz predmeta *Napredna primijenjena magija*, održanog u Školi vještičarenja i čarobnjaštva Hogwarts. Zadatke za natjecanje sastavilo je povjerenstvo koje u svom sastavu ima profesore iz različitih čarobnjačkih škola, ali i vanjske članove. Ukupno dvadeset profesora iz različitih dijelova čarobnjačkog svijeta pripremalo je učenike za ovo natjecanje, oslanjajući se pritom na službena pravila, ishode i gradivo predmeta. Kako to obično i biva, neki su poslije natjecanja bili zadovoljni, a neki su bili nezadovoljni.

Nekoliko dana nakon natjecanja povjerenstvu je sova donijela opširan svitak anonimnih komentara i prigovora vezanih za test i zadatke. U nastavku su navedeni kraći ulomci iz tog svitka. Vaš je zadatak prepoznati koja se logička pogreška pojavljuje u svakom od njih.

Dopuštene pogreške (svaka se pojavljuje najviše jednom): *ad hominem*, *ad baculum*, pogreška lažne dvojbe, slamnati čovjek, *ad populum*, pogreška autoriteta, *post hoc*, *ergo propter hoc*, *ad ignorantiam*, pogreška skliskog terena, *argumentum ad misericordiam*.

1. “Budući da nije bilo primjedbi na prošlogodišnje testove, ti su testovi objektivno bili bolji od ovogodišnjeg.”

2. “Ako zadatci idućih godina ne budu lakši, natjecanje će se sigurno ugasiti za nekoliko godina.”

3. “Ako ne prihvatite naš prijedlog da test ubuduće treba biti lakši, velik broj mentora odustat će od pripreme učenika za natjecanje iduće godine — a tada ćete sami biti odgovorni za propast cijelog natjecanja.”

4. “Većina članova Povjerenstva radi u velikim čarobnjačkim školama, pa ne razumiju situaciju u manjim čarobnjačkim školama.”

5. “Nitko nije očekivao da će se pojaviti zadatak s izvođenjem čarolije *Booleus Naivus* jer ga nije bilo prijašnjih godina, zato ga ove godine nije smjelo biti.”

6. “Nakon što je uveden zadatak s koracima izvođenja čarolije *Fallacius Logicus*, rezultati su pali — znači da je taj tip zadataka uzrok pada rezultata.”

7. “Zamislite kako se učenici osjećaju kad dođu na natjecanje i dožive frustraciju; takav je test zato neprimjeren.”

8. “Ili će testovi sljedećih godina biti lakši, ili će se natjecanje iz Napredne primijenjene magije ugasiti.”

(8×3 boda = 24 boda)

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije

- Dedukcija može biti izvod ili dokaz. Izvod počinje jednom ili više (glavnih) premisa odvojenih od ostatka izvoda vodoravnom crtom. Dokaz nema (glavnih) premisa, što znači da uvijek započinje podizvodom. Primjere možete vidjeti na dnu sljedeće stranice.
- Opravdanja se sastoje od tri podatka: simbol veznika, slovo u ili i (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Te tri informacije mogu biti odijeljene razmakom, zarezom, kosom crtom ili nekako drugačije. Poredak te tri informacije proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reitracija (opetovanje) ne sadrži slovo u ili i.
- Kod nekih je pravila poredak premisa iz kojih slijede proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom**. Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, kod uvođenja konjunkcije, redak rednog broja *k* mogao se pojaviti prije retka rednog broja *j*, a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati $\wedge u, j, k$ ili $\wedge u, k, j$. U sva četiri slučaja, pravilo zovemo $\wedge u$.
- Tri točkice signaliziraju da su na njihovu mjestu možda još neki redci osim upisanih.

Uvođenje konjunkcije. *

j		A	
		⋮	
k		B	
		⋮	
		$A \wedge B$	$\wedge u, j, k$

Uvođenje disjunkcije.

j		A		j		B	
		⋮				⋮	
		$A \vee B$	$\vee u, j$			$A \vee B$	$\vee u, j$

Uvođenje kondicionala.

j			A	pretp.
			⋮	
k			B	
			$A \rightarrow B$	$\rightarrow u, j-k$

Uvođenje bikondicionala.

j			A	pretp.
			⋮	
k			B	
m			B	pretp.
			⋮	
n			A	
			$A \leftrightarrow B$	$\leftrightarrow u, j-k, m-n$

Uvođenje kontradikcije. *

j		A	
		⋮	
k		$\neg A$	
		⋮	
		\perp	$\perp u, j, k$

Uvođenje negacije.

j			A	pretp.
			⋮	
k			\perp	
			$\neg A$	$\neg u, j-k$

Isključenje konjunkcije.

j		$A \wedge B$		j		$A \wedge B$	
		⋮				⋮	
		A	$\wedge i, j$			B	$\wedge i, j$

Isključenje disjunkcije.

e		$A \vee B$	
		\vdots	
j		A	pretp.
		\vdots	
k		C	
m		B	pretp.
		\vdots	
n		C	
		C	$\forall i, e, j-k, m-n$

Isključenje kondicionala. *

j		$A \rightarrow B$	
		⋮	
k		A	
		⋮	
		B	$\rightarrow i, j, k$

Isključenje bikondicionala. *

j		$A \leftrightarrow B$		j		$A \leftrightarrow B$	
		⋮				⋮	
k		A		k		B	
		⋮				⋮	
		B	$\leftrightarrow i, j, k$			A	$\leftrightarrow i, j, k$

Isključenje kontradikcije.

j		\perp	
		⋮	
		A	$\perp i, j$

Isključenje negacije.

j		$\neg \neg A$	
		⋮	
		A	$\neg i, j$

Reitracija (opetovanje).

j		A	
		⋮	
		A	re., j (ili op., j)